数理解析研究所講究録
25巻 1967年 38-42

Relationship algebra of (partially) balanced block designs with two unequal block sizes

大阪市大 商. 石井吾郎

v個の処理の間に m クラスのアソシエーションが定義されているとする。アソシエーション行列を $A_0, A_1, \ldots, A_m$ とし $A_i, i=0,\cdots m$ によって生成される実係数上の多元環を $\mathfrak{A}=\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ とする。$\mathfrak{A}$を持つ P.B.I.B.D. を2つ考え，そのパラメーターを

$(v, k_1, b_1, r_1, \lambda_{11}, \cdots, \lambda_{1m}) \quad n_1 = k_1 b_1 = v r_1$

$(v, k_2, b_2, r_2, \lambda_{21}, \cdots, \lambda_{2m}) \quad n_2 = k_2 b_2 = v r_2 \ , k_1 \neq k_2$

とする。各計画の生起行列を $N_1=(n^1_{jk})$, $N_2=(n^2_{jl})$ とし

$$N = (N_1, N_2)$$

とする. N を生起行列とするブロック計画を考え，それに対する観測ベクトルを X とする.

Φ を処理の生起行列とし，

Ψ をブロックの生起行列とする

$$\mathcal{R} = \{ I_n, \ E_{n,n}, \ B = \Psi\Psi', \ T_i = \Phi A_i \Phi', i=1,\cdots m \}$$

をこの計画の relationship algebra と呼ぶ。但し $n=n_1+n_2$

$E_{a,b}$ は $a\times b$ 行列で要素が全部1のもの.

母数模型，変量模型，混合模型を考え $\mathcal{R}$ を用いてそれらに対する統計解析の話をする. 記号,定義等一々しないのでそれらは Ogawa-Ishii [1], Ishii-Ogawa [2] と同じ. 詳しいことは

石井[3]に書いたので細部はそこへゆずる.

最も簡単な場合として $\mathfrak{A}=\{A_0=I_v,\ A_1=E_{vv}-I_v\}$ のとき(balanced case)をあつかう. R の構造を明にするために次の行列~~行列を~~を定義する

$$I_{b\cdot}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0\\ & \ddots\ 1 & \\ & 0\ \ddots & \\ 0 & & 0\end{array}\right]\begin{array}{l} \}b_1 \\ \\ \}b_2 \end{array}\end{array},\qquad I_{\cdot b_1}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc} 0 & & 0\\ & \ddots\ 0 & \\ & 1\ \ddots & \\ 0 & & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \}b_1 \\ \\ \}b_2 \end{array}\end{array}$$

$$B_1=\Phi I_{b\cdot}\Phi' \qquad ,\quad B_2=\Phi I_{\cdot b_1}\Phi'$$

$$B_1^*=\frac{1}{k_1}B_1 \qquad ,\quad B_2^*=\frac{1}{k_2}B_2$$

$$G_1=\begin{bmatrix} E_{n_1,n_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\}n_1\\ \}n_2\end{array},\quad G_2=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & E_{n_2n_2}\end{bmatrix},\quad G_1^*=\frac{1}{n_1}G_1$$

$$G_3=\begin{bmatrix} 0 & E_{n_1n_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad G_4=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ E_{n_2n_1} & 0\end{bmatrix},\quad G_2^*=\frac{1}{n_2}G_2$$

$$T^*=\frac{1}{r}\Phi\left(I_v-\frac{1}{v}E_{vv}\right)\Phi' \qquad ,\ r=r_1+r_2$$

$$\nu_1=(r_1-\lambda_1)/rk_1 \quad ,\quad \nu_2=(r_2-\lambda_2)/rk_2$$

[・・・] で ・・・ で生成される実係数上の多元環で・・・が基になっていることを示す.

以上の行列記号を用いて次の定理を得る

定理　$b_1 > v$,　$b_2 > v$　のとき

$$\mathcal{R} = \{ I_n, G, B, T_1 \}$$

$$= [I_n, G_1^*, G_2^*, G_3, G_4, B_1^*, B_2^*, T^*, B_1^*T^*, T^*B_1^*, B_1^*T^*B_1^*, B_2^*T^*, T^*B_2^*, B_2^*T^*B_2^*, B_1^*T^*B_2^*, B_2^*T^*B_1^*]$$

であって，その両側イデアル分解は

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_3 \oplus \mathcal{R}_4 \oplus \mathcal{R}_5$$

で与えられる。但し

$$\mathcal{R}_1 = [G_1^*, G_2^*, G_3, G_4]$$

$$\mathcal{R}_2 = [T^*, B_1^*T^*, T^*B_1^*, B_1^*T^*B_1^*, B_2^*T^*, T^*B_2^* \; B_2^*T^*B_2^* \; B_1^*T^*B_2^*, B_2^*T^*B_1^*]$$

$$\mathcal{R}_3 = [B_1^* - G_1^* - \frac{1}{\nu_1} B_1^*T^*B_1^*]$$

$$\mathcal{R}_4 = [B_2^* - G_2^* - \frac{1}{\nu_2} B_2^*T^*B_2^*]$$

$$\mathcal{R}_5 = [I - \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2}(I - B_1^* - B_2^*)T^*(I - B_1^* - B_2^*) - B_1^* - B_2^*] .$$

$b_1 = v$ のときは　$B_1^* - G_1^* - \frac{1}{\nu_1} B_1^*T^*B_1^* = 0$ で　$\mathcal{R}_3 = 0$　,

$b_2 = v$ のときは　$B_2^* - G_2^* - \frac{1}{\nu_2} B_2^*T^*B_2^* = 0$ で　$\mathcal{R}_4 = 0$　.

各 $\mathcal{R}_i$ の *principal idempotent* e_i , $i=1, \dots, 5$

は次式で与えられる。

$$e_1 = G_1^* + G_2^* ,$$

$$e_2 = \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2}(I - B_1^* - B_2^*)T^*(I - B_1^* - B_2^*) + \frac{1}{\nu_1} B_1^*T^*B_1^* + \frac{1}{\nu_2} B_2^*T^*B_2^* ,$$

$$e_3 = B_1^* - G_1^* - \frac{1}{\nu_1} B_1^* T^* B_1^*$$

$$e_4 = B_2^* - G_2^* - \frac{1}{\nu_2} B_2^* T^* B_2^*$$

$$e_5 = I - \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*) - B_1^* - B_2^*$$

$\mathrm{rank}\ e_1 = 2$

$\mathrm{rank}\ e_2 = 3(v-1)$

$\mathrm{rank}\ e_3 = b_1 - v$

$\mathrm{rank}\ e_4 = b_2 - v$

$\mathrm{rank}\ e_5 = n - b_1 - b_2 - v + 1$

$\mathcal{R}$ は次の行列代数と同型である

$$\begin{bmatrix}
* & * & \mathcal{R}_1 & & & & & \\
* & * & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & \mathcal{R}_2 & & \\
 & & * & * & * & & & \\
 & & & & & * & \mathcal{R}_3 & \\
 & & & & & & * & \mathcal{R}_4 \\
 & & & & & & \mathcal{R}_5 & *
\end{bmatrix}$$

母数模型のときの分散分析を得る為には

$e_{11} = G_1^*$ $\qquad$ $\mathrm{rank}\ e_{11} = 1$

$e_{12} = G_2^*$ $\qquad$ $\mathrm{rank}\ e_{12} = 1$

$e_{21} = \frac{1}{\nu_1} B_1^* T^* B_1^*$ $\qquad$ $\mathrm{rank}\ e_{21} = v-1$

$e_{22} = \frac{1}{\nu_2} B_2^* T^* B_2^*$ $\qquad$ $\mathrm{rank}\ e_{22} = v-1$

$e_{23} = \frac{1}{(1-\nu_1-\nu_2)} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*)$, $\mathrm{rank}\ e_{23} = v-1$

と分けておいて

$$I = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + e_{23} + e_3 + e_4 + e_5$$

より

$$X'X = X'e_{11}X + X'e_{12}X + X'e_{21}X + X'e_{22}X + X'e_{23}X + X'e_3X + X'e_4X + X'e_5X$$

を得る。これが intra-block analysis of variances を与える。

変量模型で且つ正規分布を仮定するときの最小十分統計量をもとめて見ると

$X'G_1^*$, $X'G_2^*$, $X'e_{21}X$, $X'e_{22}X$, $X'e_{23}X$, $X'T^*X$,

$X'(T^*B_1 + B_1T^*)X$, $X'(T^*B_2 + B_2T^*)X$,

$X'e_3X$, $X'e_4X$, $X'e_5X$

で与えられる。

混合模型で同様の事を行って見ると $\Gamma = E_{m1}$ として

$X'B_1^*X$, $X'B_2^*X$, $X'(I - B_1^* - B_2^*)X$

$\Gamma'B_1^*X$, $\Phi'B_1^*X$, $\Gamma'B_2^*X$, $\Phi'B_2^*X$

$\Gamma'(I - B_1^* - B_2^*)X$, $\Phi'(I - B_1^* - B_2^*)X$

で与えられる。

引用

Ogawa-Ishii　Ann. Math. Stat vol 36　1965

Ishii-Ogawa　Osaka City Univ. Business Review no 82　1965

石井吾郎　大阪統計談話会報告 Vol 10, 1966